

## ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

## ΘΕΜΑ: Εξισώσεις Fredholm

$$y(t) = f(t) + \int_a^b K(t, u) f(u, y(u)) du, \quad t \in [a, b].$$

## Παρατηρήσεις.

- Αναγωγή προβλήματος συνοριακών τιμών σε εξίσωση Fredholm
- Μία εξίσωση Fredholm δεν ανάγεται πάντα σε διαφορική εξίσωση. Παράδειγμα.
- Παραγωγή εξίσωσης Fredholm (ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις).

## 1. Η ομογενής γραμμική εξίσωση με διαχωρίσιμο πυρήνα: ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις

$$y(t) = \lambda \int_a^b a_1(t) b_1(u) y(u) du, \quad t \geq 0.$$

$$y(t) = \lambda \int_a^b [a_1(t) b_1(u) + a_2(t) b_2(u)] y(u) du, \quad t \geq 0.$$

- Αν  $D(\lambda) \neq 0$  τότε η εξίσωση έχει μόνον την μηδενική λύση.
- Αν  $D(\lambda) = 0$  τότε οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης (ιδιοσυναρτήσεις) προκύπτουν από την επίλυση του αλγεβρικού συστήματος για κάθε ιδιοτιμή ξεχωριστά.

## Παραδείγματα. (3)

## 2. Η μη ομογενής γραμμική εξίσωση με διαχωρίσιμο πυρήνα

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b a_1(t) b_1(u) y(u) du, \quad t \geq 0.$$

Για  $c = \int_a^b b_1(u) y(u) du$  είναι

$$c[1 - \lambda \int_a^b a_1(u) b_1(u) du] = \int_a^b f(s) b_1(s) ds$$

- Αν  $\int_a^b a_1(u) b_1(u) du = 0$  τότε  $c = \int_a^b f(u) b_1(u) du$  και

$$y(t) = f(t) + \lambda c a_1(t).$$

- Αν  $\int_a^b a_1(u)b_1(u)du \neq 0$  και  $\lambda \neq [\int_a^b a_1(u)b_1(u)du]^{-1}$  τότε

$$c = \frac{\int_a^b f(u)b_1(u)du}{1 - \lambda \int_a^b a_1(u)b_1(u)du}$$

και

$$y(t) = f(t) + \lambda c a_1(t).$$

- Για  $\int_a^b a_1(u)b_1(u)du \neq 0$  και  $\lambda := \lambda_0 [\int_a^b a_1(u)b_1(u)du]^{-1}$  :

– Αν  $\int_a^b f(u)b_1(u)du \neq 0$  τότε δεν υπάρχει λύση

– Αν  $\int_a^b f(u)b_1(u)du = 0$  τότε

$$y(t) = f(t) + c y_0(t)$$

με  $y_0$  την ιδιοσυνάρτηση της ιδιοτιμής

### Παραδείγματα

$$y(t) = b + \lambda \int_0^1 y^2(s)ds, \quad y(t) = t + \lambda t \int_{-1}^1 s^2 y(s)ds$$

### 2β. Η μη ομογενής γραμμική εξίσωση με διαχωρίσιμο πυρήνα

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b [a_1(t)b_1(u) + a_2(t)b_2(u)]y(u)du, \quad t \geq 0.$$

Βρίσκουμε

$$c_1(1 - \lambda a_{11}) - c_2 \lambda a_{12} = f_1$$

$$c_1 \lambda a_{21} + c_2(1 - \lambda a_{22}) = f_2$$

- Αν η ορίζουσα  $D(\lambda)$  του συστήματος είναι μη μηδενική, τότε η εξίσωση δέχεται ακριβώς μία λύση

$$y(t) = f(t) + \lambda c_1 a_1(t) + \lambda c_2 a_2(t)$$

- Για συμμετρικούς πυρήνες και τις τιμές του  $\lambda$  που η ορίζουσα μηδενίζεται (ιδιοτιμές), η εξίσωση έχει λύση αν και μόνον αν

$$\int_a^b f(s)\phi_i(s)ds = 0, \quad i = 1, 2$$

Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_i$  ξεχωριστά

- Βρίσκουμε την ιδιοσυνάρτηση  $\phi_i$  και εξετάζουμε αν ισχύει η σχέση

$$\int_a^b f(s)\phi_i(s)ds = 0, \quad i = 1, 2$$

- Λύνουμε το σύστημα για την συγκεκριμένη ιδιοτιμή  $\lambda_i$  και βρίσκουμε τις τιμές των  $c_i$ .
- Η λύση δίνεται από τον τύπο

$$y(t) = f(t) + \lambda_i c_1^i a_2(t) + \lambda_i c_2^i a_2(t)$$

### Παραδείγματα (3)